

FUNDAÇÃO DE ENSINO “EURÍPIDES SOARES DA ROCHA”
CENTRO UNIVERSITÁRIO EURÍPIDES DE MARÍLIA – UNIVEM
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

WILHEN HENRIQUE DOS SANTOS

**PLANEJAMENTO DE ROTAS NO SERVIÇO DE LEVANTAMENTO
DE DADOS PARA PROVEDORES DE INTERNET.**

MARÍLIA
2014

FUNDAÇÃO DE ENSINO “EURÍPIDES SOARES DA ROCHA”
CENTRO UNIVERSITÁRIO EURÍPIDES DE MARÍLIA – UNIVEM
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

WILHEN HENRIQUE DOS SANTOS

**PLANEJAMENTO DE ROTAS NO SERVIÇO DE LEVANTAMENTO
DE DADOS PARA PROVEDORES DE INTERNET.**

Trabalho de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Fundação de Ensino “Eurípides Soares da Rocha”, mantenedora do Centro Universitário Eurípides de Marília – UNIVEM, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Produção.

Orientador:
Prof^ª.: Me. Giulianna Marega Marques

MARÍLIA
2014

SANTOS, Wilhen Santos

Planejamento de rotas no serviço de levantamento de dados para provedores de internet. / Wilhen Henrique dos Santos; orientadora: Giulianna Marega Marques. Marília, SP: [s.n.], 2014.

55 f.

Trabalho de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) - Curso de Engenharia de Produção, Fundação de Ensino “Eurípides Soares da Rocha”, mantenedora do Centro Universitário Eurípides de Marília - UNIVEM, Marília, 2014.

1. Teoria dos Grafos 2. Planejamento de Rotas 3. Carteiro Chines,

CDD: 658.4063



FUNDAÇÃO DE ENSINO "EURÍPIDES SOARES DA ROCHA"
Mantenedora do Centro Universitário Eurípides de Marília - UNIVEM
Curso de Engenharia de Produção.

Wilhen Henrique dos Santos - 44743-9

TÍTULO "Planejamento de rotas no serviço de levantamento de dados para provedores de internet "

Banca examinadora do Trabalho de Curso apresentada ao Programa de Graduação em Engenharia de Produção da UNIVEM, F.E.E.S.R, para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Nota: 10,0

ORIENTADOR: _____
Giulianna Marega Marques

1º EXAMINADOR: _____
Rodrigo Fabiano Ravazi

2º EXAMINADOR: _____
Geraldo Cesar Meneghello

Marília, 09 de dezembro de 2014.

Dedico este trabalho a Deus por estar sempre presente;

À minha família pelo incentivo e apoio;

Aos amigos e colegas que fizeram parte da minha formação;

Aos professores, orientadores e coordenadores pelo ensino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por sempre fazer parte dela.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou e incentivou a continuar estudando e buscando um futuro melhor, aos meus amigos Rafael Junior de Moraes, Rafael Caetano Vieira, Miquelle Cardoso e Luiza Rodrigues que estiveram presentes em grande parte de minha formação, aos professores Rodrigo Fabiano Ravazi, Giuliana Marega Marques, Ricardo José Sabatine, Edson Detregiachi Filho e Fabio Piola Navarro que me orientaram em vários momentos, me ajudando, estimulando a buscar mais conhecimento e não olhar para as dificuldades.

Agradeço também à coordenadora do curso de engenharia de produção Vania Erica Herrera, por todo apoio, carinho e paciência.

A minha namorada Gabriela Helena Lourenço que nos momentos de desânimo me incentivou e me deu ânimo para buscar um futuro melhor junto a ela.

" Quem é correto nunca fracassará e será lembrado para sempre."

Salmos

SANTOS, Wilhen Henrique. **Planejamento de rotas no serviço de levantamento de dados para provedores de internet**. 2014. 55 f. Trabalho de Curso (Bacharelado em Engenharia de Produção) – Centro Universitário Eurípides de Marília, Fundação de Ensino “Eurípides Soares da Rocha”, Marília, 2014.

RESUMO

Para que os provedores de internet possam tirar o melhor proveito da tecnologia de distribuição de rede por meio de fibra óptica, é necessário um serviços de levantamento de dados em cidades ou regiões que necessitam do acesso a internet. Tal serviço requer um planejamento de rotas para obter maior proveito e eficiência de suas equipes. A presente monografia tem como objetivo o estudo "Planejamento de rotas no serviço de levantamento de dados para provedores de internet", que acompanhará a metodologia da aplicação de um algoritmo para o planejamento de rotas por meio dos conceitos da teoria dos grafos, logística e pesquisa operacional. Este estudo também terá um embasamento teórico necessário para o entendimento do algoritmo proposto, além de demonstrar a aplicação do mesmo em um cenário real, suas vantagens e desvantagens e restrições de uso.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Planejamento de Rotas. Carteiro Chinês.

SANTOS, Wilhen Henrique. **Planejamento de rotas no serviço de levantamento de dados para provedores de internet**. 2014. 55 f. Trabalho de Curso (Bacharelado em Engenharia de Produção) – Centro Universitário Eurípides de Marília, Fundação de Ensino “Eurípides Soares da Rocha”, Marília, 2014.

ABSTRACT

For the internet service providers can make the best use of the distribution network through fiber optic technology, a data-collection service in cities or regions that need access to the internet is required. Such service requires planning of routes to get maximum benefit and efficiency of their teams. This thesis aims to study the “Route planning in the data collection service for ISPs ” study, which will follow the methodology of applying an algorithm for planning routes through the concepts of graph theory , logistics and operational research. This study will also provide a necessary theoretical basis for understanding the algorithm and demonstrate its implementation in a real scenario.

Keywords: Graph Theory. Planning routes. Chinese Postman .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - As sete pontes de Königsberg.....	18
Figura 2 - Grafo de Euler	19
Figura 3 - Grafo ou grafo não orientado.....	20
Figura 4 - Dígrafo ou grafo orientado.	21
Figura 5 - Características do grafo.	22
Figura 6 - Grafo regular.....	23
Figura 7 - Grafo completo.	23
Figura 8 - Grafo bipartido.	24
Figura 9 - Grafo rotulado e grafo valorado.	24
Figura 10 - Grafo G.....	25
Figura 11 - Grafo G_s	25
Figura 12 - Hipergrafo.....	26
Figura 13 - Rotas dos grafos.....	27
Figura 14 - Grafo conexo não orientado.	28
Figura 15 - Grafo conexo orientado.	28
Figura 16 - Grafo desconexo.	28
Figura 17 - Componente conexa.	29
Figura 18 - Grafo fortemente conexo.	29
Figura 19 - Componentes fortemente conexas.....	30
Figura 20 - Vértice de corte.....	30
Figura 21 - Ponte.	31
Figura 22 - Base e anti-base.	32
Figura 23 - Raiz e anti-raiz.....	32
Figura 24 - Árvore.....	33
Figura 25 - Arborescência.	33
Figura 26 - Floresta.	34
Figura 27 - Distrito de Padre Nóbrega e áreas subdivididas.	44
Figura 28 - Legenda.	45
Figura 29 - Grafo do distrito de Padre Nóbrega.	46
Figura 30 - Área D não planejada.	47
Figura 31 - Área A não planejada.	47
Figura 32 - Área B não planejada.....	48

Figura 33 - Área C não planejada.....	48
Figura 34 - Área D planejada.	49
Figura 35 - Área A planejada.	50
Figura 36 - Área B planejada.	50
Figura 37 - Área C planejada.	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Subdivisões do distrito de Padre Nóbrega.	45
Tabela 2 - Resultados do percurso não planejado.	49
Tabela 3 - Resultados do percurso planejado.	51
Tabela 4 - Redução de repetições.	52
Tabela 5 - Redução na quilometragem total do percurso.	52

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	14
CAPÍTULO 1 – CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO.....	15
1.1 Delimitação do Tema.....	15
1.2 Objetivo Geral	15
1.3 Objetivos Específicos	15
1.4 Justificativa.....	15
1.5 Metodologia.....	16
1.6 Estrutura do Trabalho	16
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
2.1 Teoria dos Grafos: História	18
2.2 Introdução ao Estudo dos Grafos.....	20
2.2.1 Características dos grafos	21
2.2.2 Tipos de grafos.....	23
2.2.3 Tipos de rotas nos grafos	26
2.2.4 Formas dos grafos	27
2.2.5 Características das formas dos grafos	31
2.3 Algoritmos de Otimização.....	34
2.3.1 Algoritmo Colônia de formigas	34
2.3.2 Algoritmo mochila.....	35
2.3.3 Algoritmo caixeiro viajante e grafos hamiltonianos.....	36
2.4 Grafos Eulerianos	37
2.4.1 Teorema 1(Euler).....	38
2.4.2 Teorema 2	38
2.4.3 Teorema 3	39
2.4.4 Teorema 4	39
2.5 O Problema do Carteiro Chinês.....	40
2.5.1 A versão simétrica do PCC	41
2.5.2 Algoritmo viável a ser utilizado.....	42
CAPÍTULO 3 – ESTUDO DE CASO	43
3.1 Metodologia Utilizada	43

3.2	A Empresa	43
3.3	O Problema	44
3.3.1	Percurso não planejado e resultados	45
3.4	Planejamento e Resultados	49
3.4.1	Análise dos resultados	52
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS..	55

INTRODUÇÃO

Com o rápido crescimento urbano e a atual necessidade mundial do ser humano estar conectado a internet para troca de informações, trabalho, diversão e estudo, empresas de distribuição de redes estão investindo em mapeamento e levantamento de dados importantes para melhor e mais rápido atender aos seus clientes.

É necessário que haja um levantamento de dados da região, como o nome das ruas, numeração das residências, comércios, prédios públicos, etc., distância entre os postes e suas características. Este é um procedimento demorado e requer muita atenção da equipe de levantamento de dados.

A proposta deste estudo é demonstrar a aplicação metodológica de um algoritmo cuja função será a de auxiliar o planejamento das rotas que serão utilizadas pelas equipes em campo no serviço de levantamento de dados, tornando este procedimento mais eficiente.

Utilizando os conceitos de logística, pesquisa operacional e com base no estudo da teoria dos grafos, importante para este tipo de problema, será possível estabelecer uma rota que minimiza a necessidade de passar duas ou mais vezes por um mesmo trajeto e ainda assim atender todo o percurso, de forma organizada e planejada.

Segundo o dicionário Aurélio o termo Logístico vem do francês *logistique*, sua definição abrange a "parte da arte da guerra que trata do planejamento e da realização de: projeto e desenvolvimento, obtenção, armazenamento, transporte, distribuição, reparação, manutenção e evacuação de material (para fins operativos ou administrativos)".

A Pesquisa Operacional de acordo com Andrade (2011) iniciou-se durante a Segunda Guerra Mundial por meio de equipes multidisciplinares que estudaram métodos para resolver problemas de operações militares.

Conforme Cherri (2006) Avanços significativos em diversas áreas vêm sendo gerados através de um numero crescente de pesquisadores que tem investido em Pesquisa Operacional.

Na tomada de decisão, uma das soluções básicas é a utilização de modelos matemáticos. Essa utilização atribui varias vantagens no processo de tomada de decisão. (LACHTERMACHER, 2009).

A Teoria dos grafos tem sido utilizada em área tão dispares do conhecimento humano como análise de circuitos elétricos, pesquisa operacional, teoria da computação, análise numérica, química orgânica, física, topologia, genética e psicologia (Harary 1969).

CAPÍTULO 1 – CARACTERIZAÇÃO DO ESTUDO

1.1 Delimitação do Tema

Estudo sobre a teoria dos grafos e planejamento de rotas com base no algoritmo do carteiro chinês, com um estudo de caso em uma equipe de levantamento de dados de uma micro empresa prestador de serviços de coleta de dados para provedores de internet na cidade de Marília/SP, baseando-se na falta de planejamento deste tipo de empresa. Aplicação de planejamento de rotas no distrito de Padre Nóbrega.

1.2 Objetivo Geral

Realizar um estudo sobre a teoria dos grafos e sua aplicação no planejamento de rotas através de algoritmos de otimização de rotas, acompanhado da realização de um estudo de caso em uma pequena empresa que presta serviço de levantamento de dados situada em Marília/SP, demonstrando a aplicação do planejamento nas rotas utilizadas pelas equipes de levantamento de forma prática e objetiva.

1.3 Objetivos Específicos

- Compreender o estudo da teoria dos grafos e sua aplicação em planejamento de rotas;
- Estudar a aplicação dos métodos de resolução para os problemas relacionados a grafos;
- Realizar um estudo de caso em uma empresa que presta serviços relacionados com planejamento de rotas.

1.4 Justificativa

A falta de um planejamento de rotas produz uma grande incidência de reutilização das mesmas pelas equipes em campo, o que diminui a eficiência e compromete a produtividade, além de maiores gastos com locomoção e desperdício de esforços físicos

importantes para este tipo de operação. Utilizar rotas já percorridas também diminui a capacidade de atender uma área maior no tempo disponível de trabalho.

Nesse contexto, a realização desta pesquisa pretende trazer um método que minimizará ou até mesmo eliminará, dependendo do caso, o uso de ruas já percorridas, melhorando o desempenho das equipes em campo e auxiliando as empresas no planejamento de rotas, mesmo sendo inviável a busca pela rota ótima.

1.5 Metodologia

Inicialmente uma pesquisa bibliográfica será realizada com o intuito de levantar e analisar todos os dados relevantes para a pesquisa.

Lima e Miotto(2007, p. 38) asseguram que "a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório."

Com o término da pesquisa bibliográfica será realizada uma pesquisa descritiva, por meio da aplicação do referencial teórico em um estudo de caso realizado em uma empresa da cidade de Marília/SP.

Segundo Duarte (2013), "A pesquisa descritiva tem por objetivo descrever as características de uma população, de um fenômeno ou de uma experiência. Esse tipo de pesquisa estabelece relação entre as variáveis no objeto de estudo analisado. Variáveis relacionadas à classificação, medida e/ou quantidade que podem se alterar mediante o processo realizado."

1.6 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está organizado em 3 capítulos.

Este capítulo apresenta a caracterização do estudo, abordando a delimitação do tema, objetivos geral e específico, justificativa e metodologia utilizada.

No Capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica com os conceitos relevantes da teoria dos grafos: sua história, características, tipos de grafos, tipos de rotas nos grafos, formas dos grafos, os algoritmos de otimização, grafos de Euler e algoritmo do carteiro chinês.

O capítulo 3 trata-se do estudo de caso onde a metodologia utilizada, as informações da empresa, o problema que será resolvido, a apresentação dos percursos não planejados e dos percursos planejados, os resultados e a análise dos resultados serão evidenciados.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

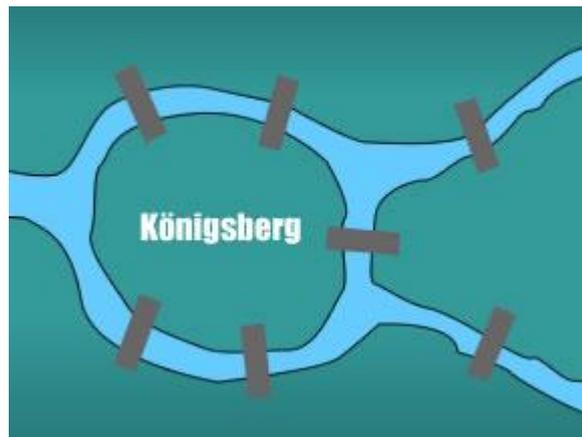
2.1 Teoria dos Grafos: História

De acordo com Feofiloff (2011):

No século 13, um enigma mobilizou uma pequena cidade localizada ao norte da Europa. Tratava-se do desafio das sete pontes de Königsberg, atual Kaliningrado. Seis delas interligavam duas ilhas às margens do Rio Pregel e uma que fazia a ligação entre as duas ilhas. O problema consistia na seguinte questão: como seria possível fazer um passeio a pé pela cidade de forma a se passar uma única vez por cada uma das sete pontes e retornar ao ponto de partida? Da resposta ao enigma surgiu a Teoria dos Grafos, criada em 1736 por Leonhard Euler.

A figura 1 ilustra a forma como as pontes eram dispostas na cidade de Königsberg.

Figura 1 - As sete pontes de Königsberg.

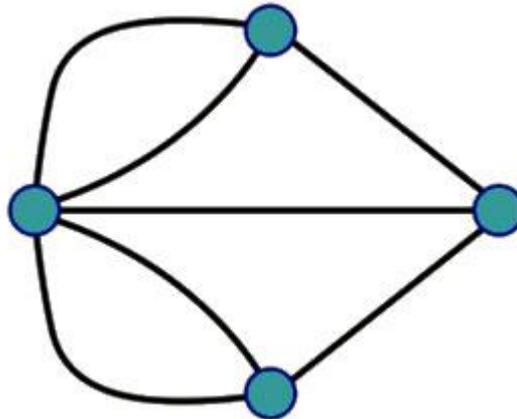


Fonte: (<http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>, Outubro/2014)

O problema em questão foi decifrado por Leonhard Euler, que provou ser impossível passar por todas as pontes uma única vez. Ele eliminou os detalhes geométricos do problema, como o comprimento das pontes, a sua forma, o tamanho das ilhas, ou seja, descartou tudo que era irrelevante ao problema, colocando foco somente no que importava. Sendo assim, ele acabou representando o problema por um grafo.

Na figura 2 é evidenciada a forma como Leonhard Euler representou o problema em forma de grafo.

Figura 2 - Grafo de Euler



Fonte: (<http://redglobbo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>, Outubro/2014)

Segundo Feofiloff (2011):

Euler raciocinou da seguinte maneira: ao atravessar cada ponto, são gastos exatamente duas linhas, uma para entrar no ponto e outra para sair. Para atravessar qualquer vértice, são gastas duas linhas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Conclusão, cada vértice deve ter grau par de linhas. Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem pontos de grau ímpar e, portanto, o problema não pode ter solução.

Apesar de não existir uma resolução para o problema de Königsberg, o raciocínio de Euler serviu de grande ajuda para problemas semelhantes e que poderiam, talvez, apresentar resultados positivos.

Feofiloff (2011) afirma que a ideia de grafos serve de modelo para uma enorme quantidade de problemas práticos. Um deles tem a ver com o desafio enfrentado pelos carteiros.

O carteiro parte da sede dos correios percorre as ruas para fazer as entregas e volta ao seu posto de trabalho. Ele realiza um percurso diariamente para entregar as cartas e é preciso que ele repita o mínimo possível, passar por uma rua mais de uma vez. Essa situação é um problema prático de certa importância, e que segue a mesma lógica dos grafos, sendo este um caso de grafos não orientados ou simétricos.

Na coleta de lixo temos, praticamente, o mesmo problema. O caminhão tem que sair do depósito, percorrer o seu trajeto com o mínimo de repetição de ruas, sendo este um problema de grafos orientados ou mistos.

É preciso lembrar também que a internet é modelada por um grafo. Os pontos são os computadores e as linhas que os ligam são referentes aos links de fibra óptica. O grafo é uma ideia muito geral e útil, podendo ser usada para uma enorme quantidade de problemas práticos, seja na indústria, na informática, ou na engenharia. Lembrando que a palavra grafo, e o seu uso generalizado para a resolução de problemas, só surgiram a partir do final do século 19.

2.2 Introdução ao Estudo dos Grafos

Segundo Mariani (s.d.):

"Um grafo $G(V,A)$ é definido pelo par de conjuntos V e A , onde:

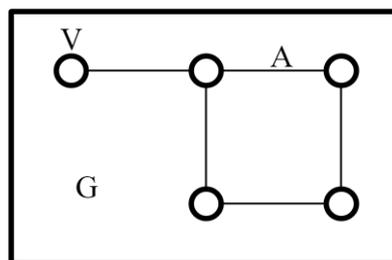
V - conjunto não vazio: os **vértices** ou **nodos** do grafo;

A - conjunto de pares ordenados $a=(v,w)$, v e $w \in V$: as **arestas** do grafo."

Só é chamado grafo aqueles que não possuem orientação, ou seja, de relações simétricas.

A figura 3 demonstra como é um grafo simples.

Figura 3 - Grafo ou grafo não orientado.

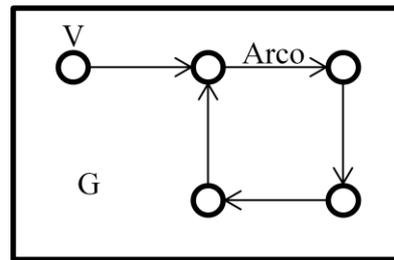


Fonte: Elaborado pelo autor

Um dígrafo é um grafo orientado, pois este possui relações não simétricas que determinam a relação entre um ponto e outro. São chamadas de arcos as conexões entre os vértices. Apesar de ser parte importante da teoria dos grafos, este estudo não abordará o uso dos grafos orientados, pois o problema tratado é um caso de grafos simétricos.

Na figura 4 é ilustrado a forma de um dígrafo simples.

Figura 4 - Dígrafo ou grafo orientado.



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.1 Características dos grafos

Os grafos possuem características que nos permitem analisá-los e interpretá-los de forma mais abrangente e detalhada, fazendo referência a estas características para melhor estudá-los, são elas:

- **Ordem**

"A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de G . (MARIANI, s.d.)".

Ex. Fig. 5: Ordem de $G = 5$.

- **Adjacência**

De acordo com Mariani (s.d):

"Em um grafo simples (grafo) dois vértices v e w são adjacentes (ou vizinhos) se há uma aresta $a=(v,w)$ em G . Esta aresta é dita ser incidente a ambos, v e w . No caso do grafo ser dirigido (dígrafo), a adjacência (vizinhança) é especializada em:

Sucessor: um vértice w é sucessor de v se há um arco que parte de v e chega em w .

Antecessor: um vértice v é antecessor de w se há um arco que parte de v e chega em w ."

Ex. Fig. 5: $a_1=(a,b)$ e $a_2=(a,c)$.

Ex. fig. 5: d é sucessor de e .

Ex. fig. 5: e é antecessor de d .

- **Grau**

Conforme Mariani (s.d.):

"O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que lhe são incidentes. No caso do grafo ser dirigido (Dígrafo), a noção de grau é especializada em:

Grau de emissão: o grau de emissão de um vértice v corresponde ao número de arcos que partem de v .

Grau de recepção: o grau de recepção de um vértice v corresponde ao número de arcos que chegam a v ."

Ex. fig. 5: Grau de emissão de $e = 1$.

Ex. fig. 5: Grau de recepção de $d = 1$.

- **Fonte**

Para Mariani (s.d.) "Um vértice v é uma fonte se o grau de recepção(v) = 0."

Ex. fig. 5: e é fonte.

- **Sumidouro**

"Um vértice v é um sumidouro se grau de emissão(v) = 0." (MARIANI, s.d.).

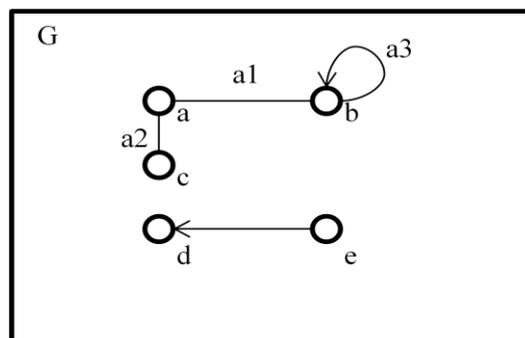
Ex. fig. 5: d é sumidouro.

- **Laço**

"Um laço é uma aresta ou arco do tipo $a=(v,v)$, ou seja, que relaciona um vértice a ele próprio." (MARIANI, s.d.).

Ex. fig. 5: a_3 é um laço, pois $a_3=(b,b)$.

Figura 5 - Características do grafo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.2 Tipos de grafos

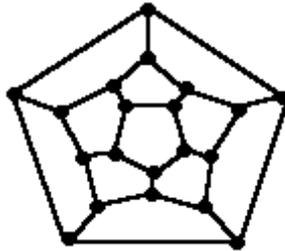
Os grafos possuem formas distintas de serem representados, e para cada forma possuem um nome específico, são eles:

- **Grafo regular**

"Um grafo é dito ser regular quando todos os seus vértices têm o mesmo grau." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 6: O grau de todos os vértices equivale a 3, por isso G é um grafo regular.

Figura 6 - Grafo regular.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

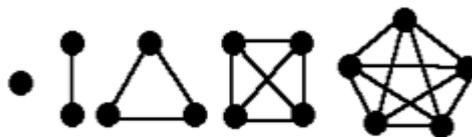
- **Grafo completo**

Segundo (MARIANI, s.d.):

"Um grafo é dito ser completo quando há uma aresta entre cada par de seus vértices. Estes grafos são designados por K_n , onde n é a ordem do grafo. Um grafo K_n possui o número máximo possível de arestas para um dados n . Ele é, também regular- $(n-1)$ pois todos os seus vértices tem grau $n-1$."

Ex. Fig. 7: Grafos (da esquerda para a direita) K_1 , K_2 , K_3 , K_4 e K_5 .

Figura 7 - Grafo completo.



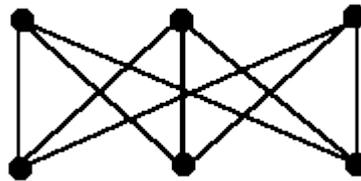
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Grafo bipartido**

Para Mariani (s.d.) "Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 ."

Ex. Fig. 8: Se dividirmos os vértices do grafo em dois subconjuntos, sempre haverá arestas unindo as vértices de um subconjunto ao outro.

Figura 8 - Grafo bipartido.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

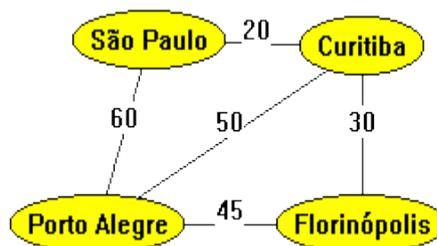
- **Grafo rotulado**

"Um grafo $G(V,A)$ é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo. Ex. Fig. 9: Vértices rotuladas com nomes de cidades." (MARIANI, s.d.).

- **Grafo valorado**

"Um grafo $G(V,A)$ é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números. Ex. Fig. 9: Arestas valoradas com "pesos" entre cidades." (MARIANI, s.d.).

Figura 9 - Grafo rotulado e grafo valorado.

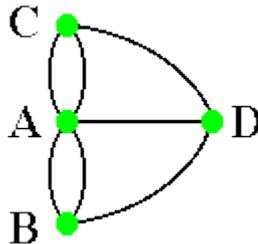


Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Multigrafo**

"Um grafo $G(V,A)$ é dito ser um multigrafo quando existem múltiplas arestas entre pares de vértices de G . Ex. Fig. 10: Incidência de 2 arestas entre os pares de vértices (A,C) e (A,B) ." (MARIANI, s.d.).

Figura 10 - Grafo G .



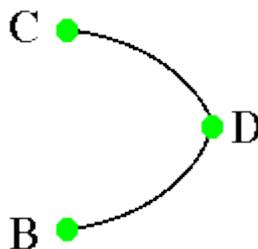
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Subgrafo**

Segundo Mariani (s.d.), "um grafo $G_s(V_s, A_s)$ é dito ser subgrafo de um grafo $G(V,A)$ quando: $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$."

Ex. Fig. 11: O grafo G_s é considerado um subgrafo de G (Fig. 10), pois os elementos de G_s estão contidos em G .

Figura 11 - Grafo G_s



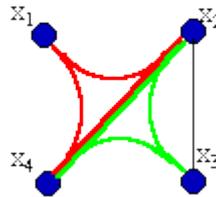
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Hipergrafo**

Segundo Mariani (s.d.), "Um Hipergrafo $H(V,A)$ é definido pelo par de conjuntos V e A , onde:

- V - conjunto não vazio;
- A - uma família e partes não vazias de V ."

Figura 12 - Hipergrafo.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

2.2.3 Tipos de rotas nos grafos

A disposição dos vértices e das arestas entre eles possuem uma classificação para cada tipo de interação, são elas:

- **Cadeia**

Conforme Mariani (s.d.), "Uma cadeia é uma sequência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices. O conceito de cadeia vale também para grafos orientados, bastando que se ignore o sentido da orientação dos arcos.

- Uma cadeia é dita ser elementar se não passa duas vezes pelo mesmo vértice.
- É dita ser simples se não passa duas vezes pela mesma aresta (arco).
- O comprimento de uma cadeia é o número de arestas (arcos) que a compõe."

A seguir serão descritos os tipos de cadeia e seus respectivos exemplos, tendo todos os casos ilustrados na figura 13.

- **Caminho**

Segundo Mariani (s.d.), "Um caminho é uma cadeia na qual todos os arcos possuem a mesma orientação. Aplica-se, portanto, somente a grafos orientados."

Ex. Fig. 13: Partindo de x_1 , temos um caminho percorrendo (x_1, x_2, x_5, x_4) ou $(x_1, x_2, x_5, x_6, x_3)$.

- **Ciclo**

"Um ciclo é uma cadeia simples e fechada (o vértice inicial é o mesmo que o vértice final)." (MARIANI, s.d.).

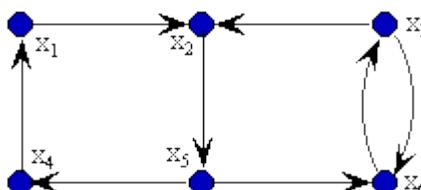
Ex. Fig. 13: O percurso $(x_1, x_2, x_5, x_4, x_1)$ é um ciclo.

- **Circuito**

"Um circuito é um caminho simples e fechado." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 13: O percurso (x_1, x_2, x_3, x_4) é um circuito.

Figura 13 - Rotas dos grafos.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Fecho transitivo**

Segundo Mariani (s.d.), "O **fecho transitivo direto (ftd)** de um vértice v é o conjunto de todos os vértices que podem ser atingidos por algum caminho iniciando em v ."

Ex.: Qualquer percurso feito a partir de um vértice qualquer é um fecho transitivo direto deste vértice.

Ainda segundo Mariani (s.d.), "O **fecho transitivo inverso (fti)** de um vértice v é o conjunto de todos os vértices a partir dos quais se pode atingir v por algum caminho."

Ex.: Qualquer percurso feito para se chegar a um vértice qualquer é um fecho transitivo inverso deste vértice.

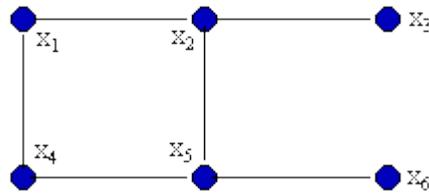
2.2.4 Formas dos grafos

- **Grafo conexo**

"Um grafo $G(V,A)$ é dito ser conexo se há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices deste grafo G ." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 14: Todos os vértices estão conectados com pelo menos um outro vértice de forma não orientada, este é um caso de grafo conexo não orientado.

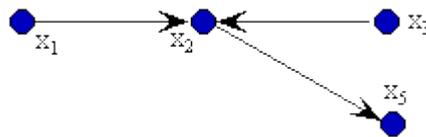
Figura 14 - Grafo conexo não orientado.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

Ex. Fig. 15: Todos os vértices estão conectados com pelo menos um outro vértice de forma orientada, este é um caso de grafo conexo orientado.

Figura 15 - Grafo conexo orientado.



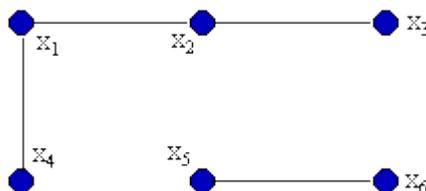
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Grafo desconexo**

"Um grafo $G(V,A)$ é dito ser desconexo se há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 16: Os vértices x_5 e x_6 estão desconexos dos vértices x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , este é um caso de grafo desconexo.

Figura 16 - Grafo desconexo.



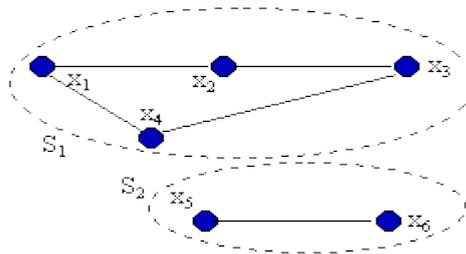
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Componente conexa**

"Um grafo $G(V,A)$ desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos conexos, disjuntos em relação aos vértices e maximais em relação à inclusão. Cada um destes subgrafos conexos é dito ser uma componente conexa de G ." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 17: Os subgrafos (x_1, x_2, x_3, x_4) e (x_5, x_6) são considerados componentes conexos de um grafo G desconexo.

Figura 17 - Componente conexa.



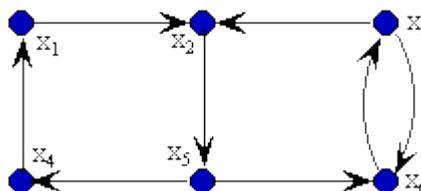
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Grafo fortemente conexo**

Segundo Mariani (s.d.), "No caso de grafos orientados, um grafo é dito ser fortemente conexo (f-conexo) se todo par de vértices está ligado por pelo menos um caminho em cada sentido, ou seja, se cada par de vértices participa de um circuito. Isto significa que cada vértice pode ser alcançável partindo-se de qualquer outro vértice do grafo."

A figura 18 ilustra um grafo fortemente conexo.

Figura 18 - Grafo fortemente conexo.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

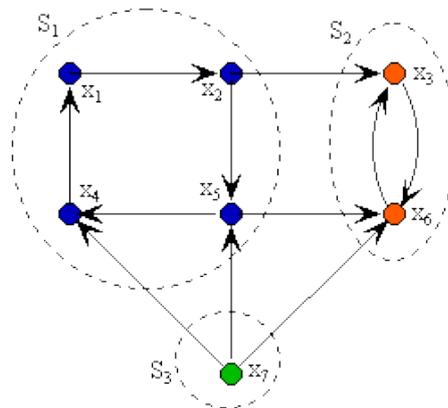
- **Componente fortemente conexa**

"Um grafo $G(V,A)$ que não é fortemente conexo é formado por pelo menos dois subgrafos fortemente conexos, disjuntos em relação aos vértices e maximais em relação à

inclusão. Cada um destes subgrafos é dito ser uma componente fortemente conexa de G ." (MARIANI, s.d.).

Na figura 19 é evidenciado um grafo que possui componentes fortemente conexas.

Figura 19 - Componentes fortemente conexas.



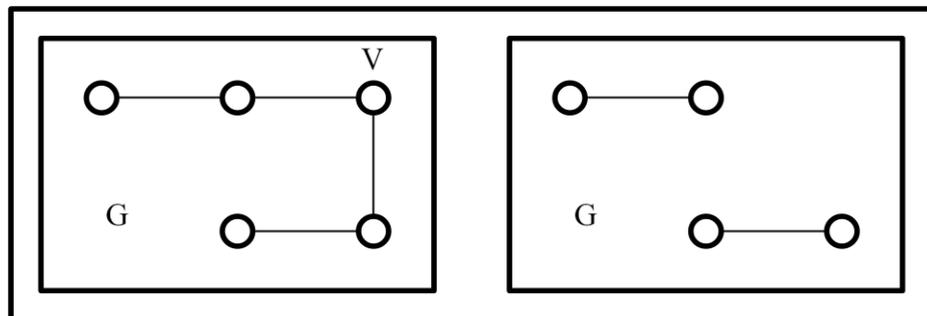
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Vértice de corte**

"Um vértice é dito ser um vértice de corte se sua remoção (juntamente com as arestas a ele conectadas) provoca uma redução na conectividade do grafo." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 20: Se retirarmos o vértice V do grafo G , este grafo passará a ser um grafo desconexo com duas componentes conexas, desta forma o vértice V é chamado de vértice de corte.

Figura 20 - Vértice de corte.



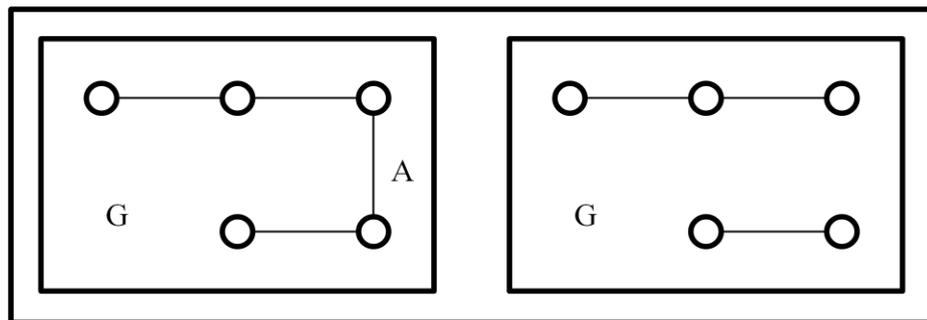
Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Ponte**

"Uma aresta é dita ser uma ponte se sua remoção provoca uma redução na conexidade do grafo." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 21: Se retirarmos a aresta A do grafo G, este grafo passará a ser um grafo desconexo com duas componentes conexas, desta forma a aresta A é chamada de ponte.

Figura 21 - Ponte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.5 Características das formas dos grafos

- **Base**

"Uma base de um grafo $G(V,A)$ é um subconjunto $B \subseteq V$, tal que:

- Dois vértices quaisquer de B não são ligados por nenhum caminho;
- Todo vértice não pertencente a B pode ser atingido por um caminho partindo de B ." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 22: Os vértices de B faz com que B seja base de G , pois a eles não há nenhum outro vértice ligado, mas a partir deles se pode alcançar os vértices de A

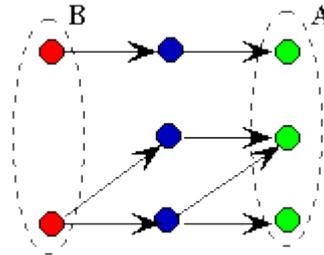
- **Anti-base**

"Uma anti-base de um grafo $G(V,A)$ é um subconjunto $A \subseteq V$, tal que:

- Dois vértices quaisquer de A não são ligados por nenhum caminho;
- De todo vértice não pertencente a A pode-se atingir A por um caminho." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 22: Os vértices de A faz com que A seja anti-base de G, pois é possível atingir A por um caminho partindo de B.

Figura 22 - Base e anti-base.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Raiz**

"Se a base de um grafo $G(V,A)$ é um conjunto unitário, então esta base é a raiz de G ." (MARIANI, s.d.).

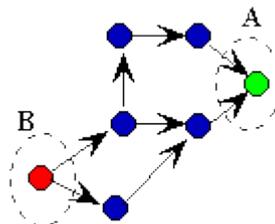
Ex. Fig. 23: O vértice B é uma base de G , além disso ele é um conjunto unitário, tornando-se uma raiz de G .

- **Anti-raiz**

"Se a anti-base de um grafo $G(V,A)$ é um conjunto unitário, então esta anti-base é a anti-raiz de G ." (MARIANI, s.d.).

Ex. Fig. 23: O vértice A é uma anti-base de G , além disso ele é um conjunto unitário, tornando-se uma anti-raiz de G .

Figura 23 - Raiz e anti-raiz.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

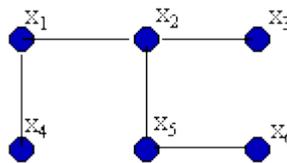
- **Árvore**

Conforme Mariani (s.d.), "Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos. Seja $G(V,A)$ um grafo com ordem $n \geq 2$. As propriedades seguintes são equivalentes e suficientes para caracterizar G como uma árvore:

- G é conexo e sem ciclos;
- G é sem ciclos e tem $n-1$ arestas;
- G é conexo e tem $n-1$ arestas;
- G é sem ciclos e por adição de uma aresta se cria um ciclo e somente um;
- G é conexo, mas deixa de sê-lo se uma aresta é suprimida (todas as arestas são pontes);
- Todo par de vértices de G é unido por uma e somente uma cadeia simples."

A figura 24 ilustra um caso de árvore em grafos.

Figura 24 - Árvore.



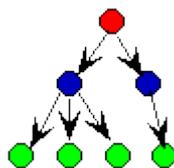
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Arborescência**

"Uma arborescência é uma árvore que possui uma raiz. Aplica-se, portanto, somente a grafos orientados." (MARIANI, s.d.).

A figura 25 ilustra como seria uma arborescência.

Figura 25 - Arborescência.



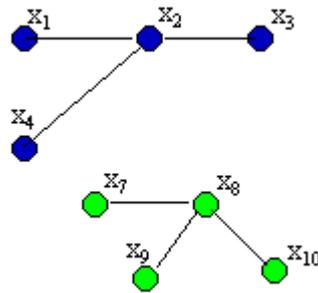
Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

- **Floresta**

"Uma floresta é um grafo cujas componentes conexas são árvores."
(MARIANI, s.d.).

Um caso de floresta é ilustrado na figura 26.

Figura 26 - Floresta.



Fonte: <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>, Agosto de 2014.

2.3 Algoritmos de Otimização

Neste subtópico será apresentado um resumo dos mais conhecidos algoritmos de otimização, analisando os pontos positivos e negativos de cada um e a viabilidade destes para a proposta de pesquisa.

2.3.1 Algoritmo Colônia de formigas

A técnica de otimização por colônias de formigas foi inspirada nos mecanismos de organização e comunicação das colônias de formigas reais, esta técnica foi proposta por Marco Dorigo em 1996.

A capacidade natural de comunicação indireta das formigas, por meio de seus feromonios leva a colônia inteira a se locomover organizadamente por uma mesma rota para alcançar seus objetivos ou realizar tarefas específicas.

As formigas que compõem a colônia iniciam uma procura aleatória nas áreas ao redor do formigueiro, sem uma rota previamente estabelecida e, ao encontrarem o seu objetivo, retornam pelo mesmo caminho que percorreram para alcançá-lo e, quanto menor o caminho percorrido, maior a quantidade de feromonios depositados no solo, fazendo com que todas as formigas agora sigam por este caminho.

Baseando-se neste comportamento natural, o algoritmo colônia de formigas distribui vários grupos de formigas artificiais do ponto inicial, que percorrerão todos os pontos aleatoriamente até chegarem no objetivo, ou seja, o ponto final. Os grupos de formigas vão se dividindo em cada ponto, de modo que apenas uma formiga faça um trajeto único. A formiga que chegar mais rápido ao ponto final é a formiga que fez a menor rota e, por isso, esta é a melhor rota que se deseja obter deste algoritmo.

Este algoritmo apresenta a menor rota entre dois pontos distantes, o que o torna inviável para o projeto, que precisa passar por todos os pontos com o menor número de repetições de trechos.

2.3.2 Algoritmo mochila

O problema da Mochila também conhecido na literatura como *Knapsack Problem* - PK é conhecido por meio do relacionamento com grande número de outros modelos de programação e esse fato o torna muito importante. Podemos entendê-lo como desafio de encher uma mochila sem ultrapassar um determinado peso e otimizar o valor do produto carregado (GOLDBARG AND LUNA, 2000).

"O problema da mochila segundo Bretas (2012, p.2) aborda uma classe de problemas dos mais estudados em otimização combinatória e em subproblemas de outros problemas práticos. O nome surgiu devido o modelo de uma situação em que é necessário carregar uma mochila com capacidade limitada, com um conjunto de objetos com pesos e valores diferentes."

Como bem nota Bretas.(2012, p. 2), "[...] O objetivo é ocupar a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando o seu peso máximo. Definir o subconjunto de objetos cujo peso não ultrapasse o limite da mochila e ao mesmo tempo maximizando o seu valor total, corresponde a resolver o problema da mochila."

Há algumas formas de se resolver o problema mochila por meio dos algoritmos, são elas:

Solução usando backtraking: Este algoritmo é implementado com o conceito de utilizar a força bruta, comparando todas as possibilidades até encontrar a melhor. Este algoritmo devolve a resposta correta, mas quando consideramos um conjunto relativamente grande de dados, o tempo gasto para obtermos a resposta é exponencialmente difícil de ser encontrada, logo o tempo deste algoritmo é exponencial.

Solução usando programação dinâmica: Este algoritmo também encontra a resposta correta com um tempo melhor que o anterior, porém se aumentarmos consideravelmente a capacidade da mochila, este algoritmo gastará um tempo muito maior do que o esperado. Assim dizemos que este algoritmo possui um tempo pseudo-polinomial, mas na sua essência ele é exponencial.

Solução usando o método guloso: O terceiro e último algoritmo utiliza o método de aproximação ou heurística. Este algoritmo pode ou não devolver um resultado correto, dependendo de sua execução, para isso existe uma taxa de aproximação à qual o algoritmo possui. Este algoritmo é baseado na programação gulosa.

Apesar do algoritmo da mochila poder resolver um problema com vários "pesos" diferentes, é inviável para o projeto pois sua resolução traria o planejamento da melhor rota entre dois pontos, que não é o problema abordado neste trabalho..

2.3.3 Algoritmo caixeiro viajante e grafos hamiltonianos

Segundo Ritt, Buriol e Prestes(2011):

"O problema do caixeiro viajante (PCV) é uma série de problemas reais importantes que podem ser modelados em termos de ciclos Hamiltonianos em grafos completos, é possível resolvê-lo por meio de duas estratégias simples. Um grafo G é dito ser hamiltoniano se existe um ciclo em G que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo. Este ciclo é chamado de ciclo hamiltoniano. Sendo assim, um grafo é hamiltoniano se ele contiver um ciclo hamiltoniano."

Método exaustivo:

De acordo com Ritt, Buriol e Prestes(2011):

"É um método que consiste em fazer uma lista de todos os ciclos Hamiltonianos do grafo, calcular o peso de cada um e escolher um de peso mínimo. Um caminho é determinado por uma sequência de vértices distintas."

Método do vizinho mais próximo (método guloso):

Segundo Ritt, Buriol e Prestes(2011):

"Escolhe-se um vértice e a aresta de menos peso incidente nesse vértice. Esta aresta determina um outro vértice. De cada novo vértice escolhe-se a aresta de menor peso, de entre as arestas que são incidentes nesse vértice e num vértice que ainda não foi escolhido, finalizando no vértice inicial."

Método do vizinho mais próximo com repetição:

Conforme Ritt, Buriol e Prestes(2011):

"Este algoritmo funciona como o algoritmo do vizinho mais próximo já descrito, sendo a diferença que este último é implementado tantas vezes quantos os vértices do grafo, tomando de cada vez um vértice diferente como vértice inicial. Depois é escolhido o ciclo de peso menor como resultado final do algoritmo."

Método da aresta de menor peso:

Segundo Ritt, Buriol e Prestes(2011):

"A ideia deste algoritmo é encontrar um ciclo Hamiltoniano à custa de arestas "soltas". Escolhendo a aresta de menor peso do grafo e depois escolhendo a aresta de menor peso de entre as arestas que não foram ainda escolhidas, podendo estas não serem adjacentes à primeira, obedecendo à duas regras:

1. Não permitir que se forme um ciclo a não ser que já todos os vértices sejam incidentes com alguma das arestas já escolhidas;
2. Não permitir que de entre as arestas escolhidas haja três incidentes no mesmo vértice. Repetimos este processo até obtermos um ciclo, que será necessariamente um ciclo Hamiltoniano."

O algoritmo do caixeiro viajante possui uma resolução interessante para problemas em grafos, o de diminuir o custo de um percurso que passe pelos vértices desejados, porém não atende os requisitos necessários para resolver o problema tratado neste estudo.

2.4 Grafos Eulerianos

O problema estudado por Euler em 1736 resultou em um teorema de existência para um percurso abrangente em relação às arestas de um grafo não orientado, utilizando cada aresta uma única vez. Tal percurso, se existir, é chamado euleriano e pode ser fechado ou aberto. Mais geralmente, pode-se caracterizar a existência de um número determinado de percursos que particionam o conjunto de arestas, em grafos não orientados quaisquer e, enfim, teoria semelhante pode ser desenvolvida para grafos orientados. Nesses resultados se considera, em geral, o grafo como conexo: a inexistência de um percurso abrangente em um grafo não conexo é evidentemente trivial.

2.4.1 Teorema 1(Euler)

Um grafo $G = (X,U)$ conexo e não orientado possui um ciclo euleriano se e somente se não possuir vértices de grau ímpar.

Prova:

Seja $G = (X,U)$ euleriano. Ao procurarmos percorrer nele um ciclo euleriano poderemos escolher um vértice e daí prosseguir atravessando os demais vértices, apagando as arestas utilizadas. Logo, ao atravessarmos um vértice x , seu grau $d(x)$ diminuirá de duas unidades, correspondentes às arestas de entrada e de saída; portanto todos os vértices intermediários no percurso deverão ter grau par, ou será impossível anular os seus graus ao final deste processo (o que indicará que restarão arestas a percorrer). O vértice inicial também deverá ter grau par, visto que o uso de uma de suas arestas adjacentes ao início o deixará com grau vigente ímpar, o que permitirá a anulação do grau ao final do processo.

Seja $G = (X,U)$ um grafo com todos os vértices de grau par. Consideremos uma aresta (x,y) cuja supressão mantenha a conexidade de G e procuremos um percurso μ_{xy} que não a utilize, eliminando suas arestas à medida em que forem percorridas. Há dois casos possíveis:

(a) o percurso utiliza todas as arestas restantes do grafo: então ele, juntamente com (x,y) , formará um ciclo euleriano;

(b) o percurso não utiliza todas as arestas do grafo; então, pelo mesmo raciocínio, os graus finais não nulos dos vértices intermediários serão pares, o que permitirá a definição de ciclos secundários saindo e voltando para μ_{xy} , que podem ser percorridos com eliminação de arestas até que todos os graus sejam anulados. Ao chegar a y , atravessa-se (x,y) , o que anula os graus desses vértices; tem-se assim um ciclo euleriano.

A generalização para grafos com vértices de graus quaisquer é dada pelo seguinte teorema:

2.4.2 Teorema 2

O número mínimo de percursos que particionam o conjunto de arestas de um grafo $G = (X,U)$ não orientado com $2k$ vértices de grau ímpar é k ($k \in N - \{0\}$).

Prova:

Consideremos um grafo euleriano G e um ciclo euleriano em G . Para obtermos $2k$ vértice de grau ímpar bastará retirarmos do grafo k arestas não adjacentes duas a duas. Após esta retirada, o ciclo ficará subdividido em k percursos e eles particionarão o conjunto de arestas, uma vez que o ciclo assim subdividido era euleriano. Poderemos obter uma partição com mais de k percursos, bastando para isso subdividir um ou mais dos já obtidos sem eliminar arestas, mas não poderemos obter o resultado desejado com menos de k percursos; logo, k é mínimo.

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par, visto ser a soma dos graus igual ao dobro do número das arestas.

Em grafos orientados, a consideração de circuitos e caminhos eulerianos envolve uma nova definição que é a de grafo **pseudo-simétricos**: Um grafo orientado $G = (X, U)$ é pseudo-simétricos se e somente se verificar:

$$d^+(x) = d^-(x) \quad \forall x \in X$$

2.4.3 Teorema 3

Um grafo orientado conexo admite um circuito euleriano se e somente se for pseudo-simétricos.

Prova: semelhante à do teorema de **Euler**, particularizando os percursos como caminhos.

Todo grafo simétrico é pseudo-simétricos e todo grafo simétrico corresponde a um grafo não orientado; logo, o **Teorema 1** pode ser visto como um corolário do **Teorema 3**.

Um teorema análogo ao **Teorema 2**, válido para grafos orientados, é o seguinte:

2.4.4 Teorema 4

Em um grafo orientado conexo não pseudo-simétricos, o número mínimo de caminhos que particionam o conjunto de arcos é igual a

$$k = \sum_{x \in S} (d^+(x) - d^-(x)) = \sum_{x \in T} (d^-(x) - d^+(x))$$

onde

$$S = \{x \in X \mid d^+(x) > d^-(x)\}$$

$$T = \{x \in X \mid d^-(x) > d^+(x)\}$$

Prova: Seja um grafo \mathbf{G} orientado não euleriano. Inicialmente precisamos provar a validade do **Teorema 2**. Para isso, basta observar que em relação a um grafo orientado podemos escrever:

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in S} d^+(x) + \sum_{x \in T} d^-(x) + \sum_{x \in X-(S \cup T)} d^+(x) \quad (4a)$$

e

$$\sum_{x \in X} d^-(x) = \sum_{x \in S} d^-(x) + \sum_{x \in T} d^-(x) + \sum_{x \in X-(S \cup T)} d^-(x) \quad (4b)$$

Subtraindo (4a) de (4b) teremos

$$\sum_{x \in S} (d^+(x) - d^-(x)) - \sum_{x \in T} (d^-(x) - d^+(x)) = 0 \quad (4c)$$

de onde, dadas as definições de \mathbf{S} e de \mathbf{T} , se segue o Teorema 2.

Em seguida observamos que, pelo Teorema 3, para transformar $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U})$ em um grafo \mathbf{H} euleriano, devemos adicionar a \mathbf{U} um total de k arcos da forma (\mathbf{T}, \mathbf{S}) , o que permitirá igualar os semigraus interior e exterior em todos os vértices. O novo grafo possuirá, portanto, um circuito euleriano; removendo em seguida os k arcos adicionados teremos de novo \mathbf{U} , agora particionado em k caminhos. Por um raciocínio análogo ao do Teorema 2, concluímos que k é mínimo.

2.5 O Problema do Carteiro Chinês

Com o estudo dos circuitos eulerianos, podemos abordar o problema do carteiro chinês (PCC), ou seja, desenvolver instrumentos que permitam a aplicação da teoria dos percursos eulerianos a problemas práticos, onde não se pode esperar deparar em cada caso com um grafo euleriano.

O Problema do Carteiro Chinês (PCC) busca um caminho tal que todas as ruas devem ser visitadas e que o caminho seja mínimo, mas não que passe, necessariamente, exatamente uma vez por cada rua do percurso.

Em uma situação aplicada se tem geralmente um grafo valorado e o interesse estará na repetição de itinerários parciais, de modo a gerar um itinerário único, que será então um percurso pré-euleriano. Utilizando a proposta desta pesquisa como exemplo, o problema abordado é determinar qual o melhor percurso que a equipe de levantamento de dados deverá

percorrer, repetindo o menor número de ruas a partir do início do trajeto até o fim do mesmo, com uma rota de custo mínimo para a equipe. Isto pode ser feito por meio de um grafo auxiliar euleriano, no qual o grafo original se transforma.

Como as equipes de levantamento de dados estarão a pé, não precisarão respeitar a orientação das ruas, avenidas ou rodovias, neste caso o grafo apresentará rotas não orientadas, o qual se pode resolver apenas estudando a versão não orientada ou simétrica do PCC.

2.5.1 A versão simétrica do PCC

Segundo Gomes(2007, p.328):

"O caso simétrico do PCC, suas ligações são valoradas de modo que o percurso entre quaisquer pares de vértices de um grafo conexo é o mesmo de i para j , e de j para i . Neste caso, um percurso euleriano somente poderá ser realizado, quando um dado grafo de G for transformado em um multigrafo G' de tal modo que os vértices de grau ímpar de G , possuam grau par em G' . Ou melhor, todo vértice de G , tem um número par de elos ligados a eles em G' ."

Formulando-se o problema matematicamente (Gomes apud Edmonds & Johnson, 1973), temos:

$$\text{(PCC-Simétrico)} \quad \text{Minimizar } \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij} \quad \text{[P1]}$$

Sujeito a:

$$\sum_{(v_i v_j) \in E(S)} x_{ij} \geq 1, S \subset V, S \text{ são os vértices de grau ímpar} \quad \text{[P2]}$$

$$x_{ij} \in Z_+, \forall (v_i, v_j) \in E(S) \quad \text{[P3]}$$

onde,

Qualquer conjunto próprio S , não vazio, de V , como $E(S) = \{(v_i, v_j) | v_i \in S, v_j \in V - S \text{ ou } v_i \in V - S, v_j \in S\}$;

x_{ij} é o número de vezes (inteiro) que um elo de G será repetido em G' ;

Como resultado interessante desta formulação, Edmonds & Johnson mostraram que o poliedro formado pelas equações [P2] e [P3], é igual à envoltória convexa das soluções do problema, sendo que as equações [P2] referem-se a desigualdades de *blossoms* (circuitos com $2k+1$ vértices, os quais têm k elos emparelhados em um *matching* fixo) (Gomes apud Eiselt *et al.*, 1995i).

Assim um algoritmo para o PCC-Simétrico pode ser resumido como segue.

Passo 1: Definir $S \subset V$, conjunto dos vértices de grau ímpar;

Passo 2: Encontrar o grafo completo ($K_{|S|}$) valorado com os percursos mínimos entre dois quaisquer vértices de S ;

Passo 3: Aplicar *1-MatchingValorado* ($S, E(S), G'$) - retorna G' ;

Passo 4: $p(G') = \sum_{ij \in E'} c_{ij} x_{ij}$ {perímetro do multigrafo aumentado, onde E' é o conjunto dos elos de G' }.

Os algoritmos para a resolução do PCC-Simétrico são da ordem de $O(n m)$, onde n é o número de vértices de grau ímpar e m é o número de elos de G , quando for utilizado um algoritmo de *1-matchingvalorado* proposto por Edmonds & Johnson (Bukard & Derigs, 1980). Já para o algoritmo do ciclo euleriano, não será necessário mais que $O(m)$, onde m é o número de elos de G' .

2.5.2 Algoritmo viável a ser utilizado

O algoritmo mais viável e que será utilizado é o algoritmo do Carteiro Chinês, pois este nos permite passar por todos os pontos desejados com o mínimo de repetições possíveis, que é o objetivo que se deseja alcançar com este estudo.

CAPÍTULO 3 – ESTUDO DE CASO

3.1 Metodologia Utilizada

Para que este estudo de caso pudesse ser realizado, inicialmente foi feito um acompanhamento de um membro da equipe de levantamento de dados de uma empresa que presta serviços para provedores de internet, observando os padrões utilizados e eficiência durante o procedimento, dados importantes para o desenvolvimento e aplicação da pesquisa.

Com base nestes padrões foi estabelecida uma rota hipotética no distrito de Padre Nóbrega/SP e outra rota planejada de acordo com o que fora estudado na revisão bibliográfica, analisando as duas rotas e os resultados obtidos e esperados com a aplicação do algoritmo do Carteiro Chinês.

3.2 A Empresa

A empresa escolhida para observação dos padrões utilizados pelas equipes em campo foi uma microempresa (ME), situada em Marília/SP, especializada em projetos de inovação tecnológica, que oferece serviços e soluções de software e de infraestrutura de TI tais como desenvolvimento de sistemas e aplicativos, projetos de infraestrutura de redes e telecomunicações, projetos de pesquisa, desenvolvimento e inovação (PD&I) e treinamentos personalizados na área de TI.

A missão da empresa é definida por "Ser referência no mercado buscando inovação e aperfeiçoamento contínuo, respeitando os princípios, as políticas e os procedimentos de cada cliente, trabalhando com honestidade, profissionalismo e transparência."

Sua visão se dá por "Construir uma parceria sólida e duradoura que beneficie a empresa e a seus clientes, de modo a oferecer ao mesmo tempo um relacionamento de confiança e um atendimento personalizado, garantindo segurança e tranquilidade para que seus clientes mantenham-se focados em seus negócios (core business)."

Como valor, afirma "Ter ética nas relações com seus clientes, fornecedores, parceiros e colaboradores, trabalhando com confiabilidade, responsabilidade, flexibilidade e especialização."

Apesar do pequeno tamanho da empresa, seus serviços atendem clientes em âmbito nacional.

3.3 O Problema

Partindo do ponto 0, deseja-se percorrer todas as ruas do distrito com o menor número de repetições de ruas e o menor custo de percurso.

A equipe possui em média a capacidade de atender 12 km de percurso por dia de trabalho, fazendo o levantamento de dados de postes, comércios e residências, classe socioeconômica e distância entre postes.

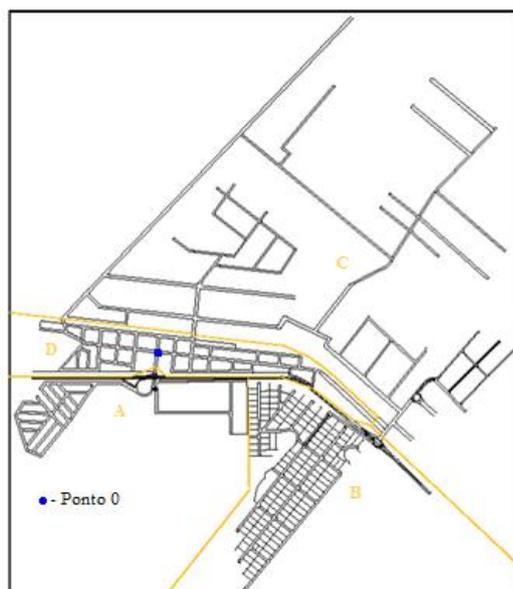
Ao término do percurso é preferível que a equipe esteja no ponto de partida, pois é onde deixaram o carro da empresa ao começar o percurso, pois o levantamento de dados é feito a pé, o que os permitem ir e vir pelas ruas independente de estarem na contramão ou não.

O distrito de Padre Nóbrega possui duas áreas isoladas, sendo elas as áreas A e B, referentes a condomínios fechados. A maior área é a C, local que abrange chácaras, instituições que oferecem serviço de proteção animal e outras de lazer, sendo esta área considerada rural.

A área D é a que proporciona maior interesse pelos provedores de internet, pois é a mais habitada e a que possui maior potencial de novos clientes, gerando assim uma demanda maior pelo serviço dos provedores.

A figura 27 ilustra o mapa do distrito e as áreas subdivididas descritas anteriormente.

Figura 27 - Distrito de Padre Nóbrega e áreas subdivididas.



Fonte: Prefeitura de Marília, adaptado pelo autor.

A tabela 1 mostra aproximadamente a quilometragem total das ruas de cada área, sendo este valor dado pela soma das distâncias de cada rua das áreas do distrito.

Tabela 1 - Subdivisões do distrito de Padre Nóbrega.

Km total da área A	6,803 km
Km total da área B	6,558 km
Km total da área C	21,986 km
Km total da área D	8,140 km
Km total do distrito	43,487 km

Fonte: Elaborado pelo autor.

A quilometragem obtida foi estimada por meio de uma ferramenta de digitalização e cadastro disponível na empresa.

3.3.1 Percurso não planejado e resultados

O primeiro passo a ser tomado é transformar em grafo as áreas do distrito. Os grafos não precisam ter relação de distância ou aspectos geográficos, apenas a evidência dos vértices e arestas, no caso de mapas, os nós (cruzamentos) e as ruas que ligam os nós.

A Figura 28 refere-se à legenda dos grafos que serão evidenciados nesta pesquisa.

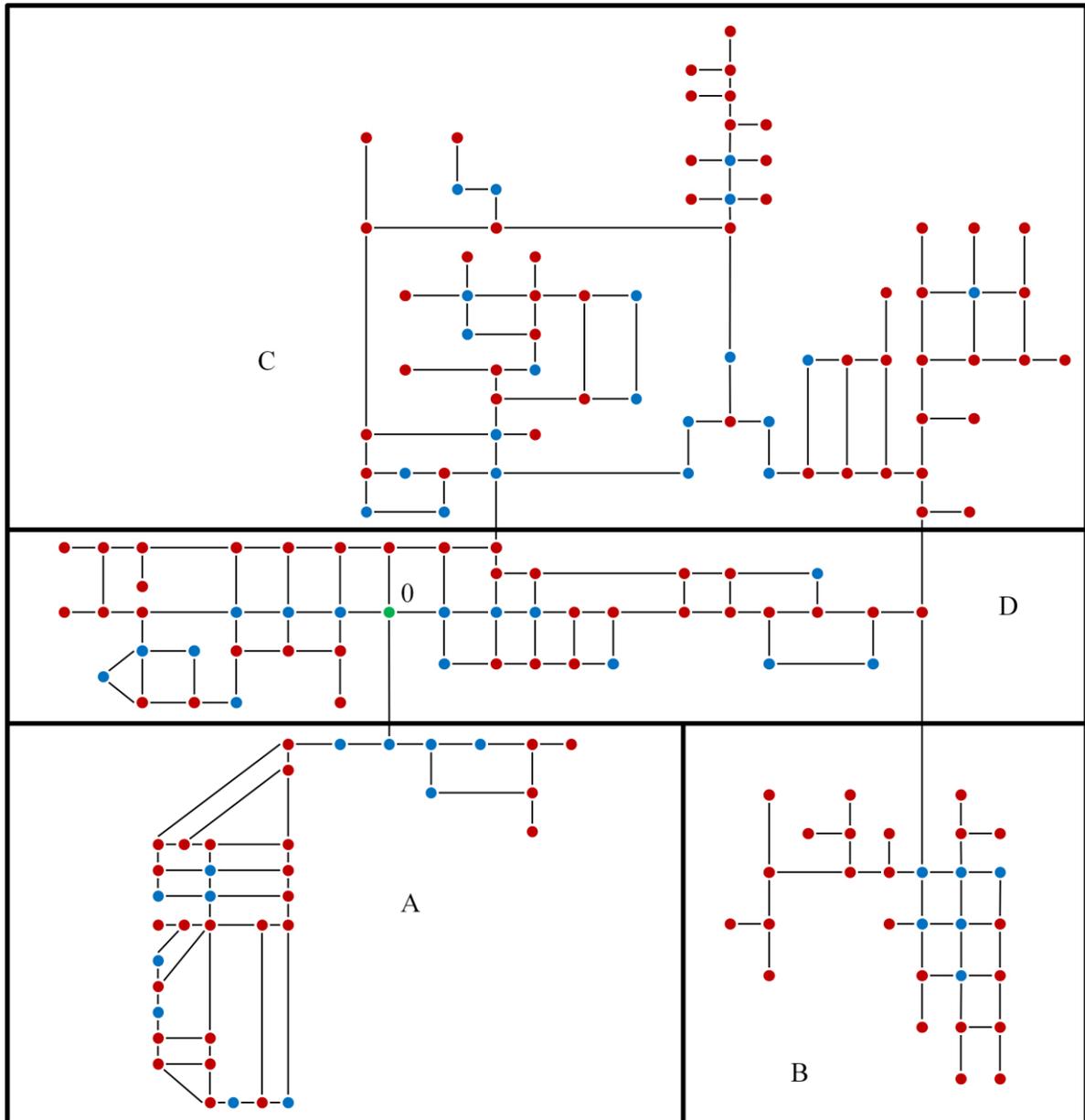
Figura 28 - Legenda.

 Início.	 Rua.
 Nó de grau par.	 Percurso não repetido.
 Nó de grau ímpar.	 Percurso repetido.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 29 é demonstrado o grafo do distrito de Padre Nóbrega com os nós posicionados de maneira que possam ser localizados e entendidos facilmente.

Figura 29 - Grafo do distrito de Padre Nóbrega.

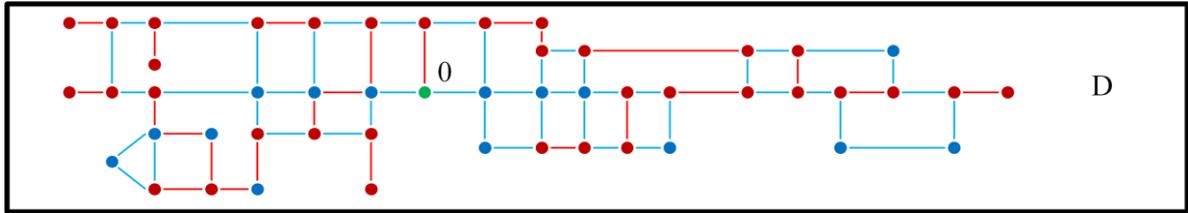


Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja o ponto 0 na área D o início do percurso, um membro da equipe de levantamento de dados inicializa o procedimento sem um planejamento prévio, repetindo desnecessariamente algumas ruas do percurso.

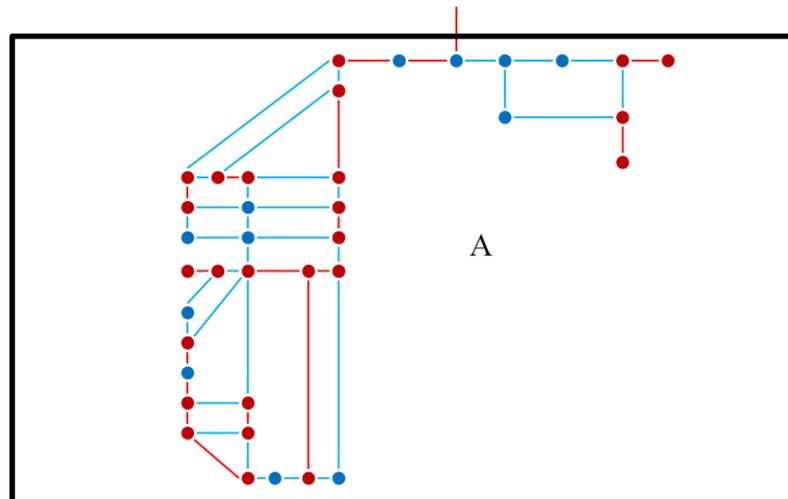
As Figuras 30, 31, 32 e 33 são uma demonstração de um percurso não planejado nas rotas D, A, B e C respectivamente.

Figura 30 - Área D não planejada.



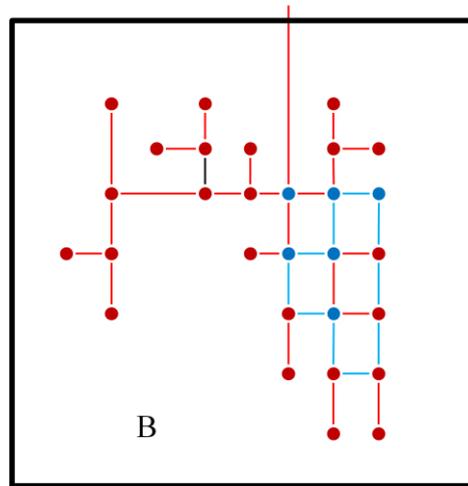
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 - Área A não planejada.



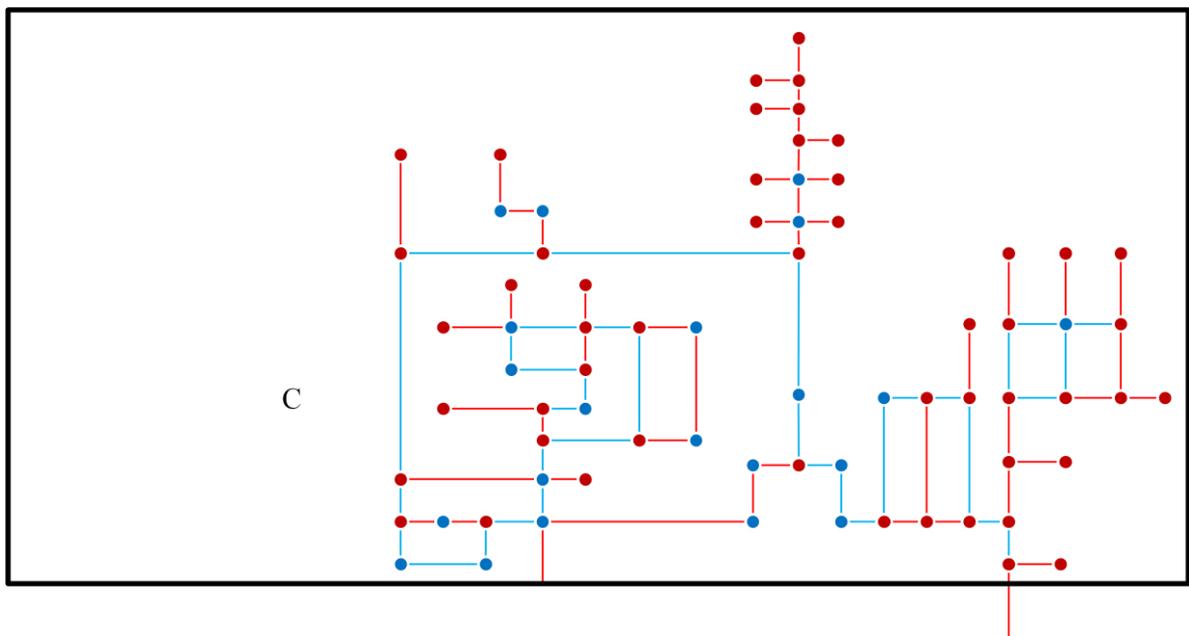
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 - Área B não planejada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33 - Área C não planejada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 2 estão os dados referentes aos percursos elaborados sem planejamento.

Tabela 2 - Resultados do percurso não planejado.

Área	Percurso não planejado (km)	Km repetido (km)	Km adicional (%)	Nº de repetições
A	8,843	2,040	29,99	19
B	10,256	3,698	56,39	25
C	33,755	11,769	53,53	49
D	10,091	1,951	23,97	24
Total	62,945	19,458	44,74	117

Fonte: Elaborado pelo autor.

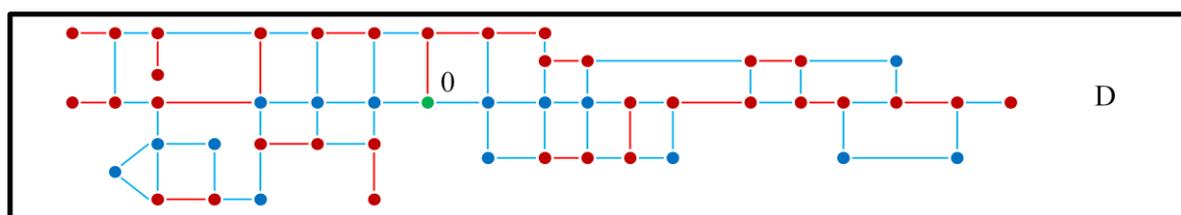
Como pode-se perceber, há um aumento significativo na quilometragem total do percurso devido ao número de repetições de ruas que foram necessárias para concluir o levantamento de dados. Ao todo 117 ruas foram reutilizadas para finalizar o levantamento de dados de forma não planejada. Essas ruas reutilizadas somaram 19,458 km a quilometragem total do distrito (43,487 km), aproximadamente 44,74% de km adicional.

3.4 Planejamento e Resultados

Abordando o mesmo cenário agora será aplicado o conhecimento adquirido na revisão bibliográfica, onde se fará um planejamento de um percurso no distrito de Padre Nóbrega com base no algoritmo do Carteiro Chinês, dessa forma, passando por todas as ruas com o mínimo de repetições possíveis e almejando o menor custo possível.

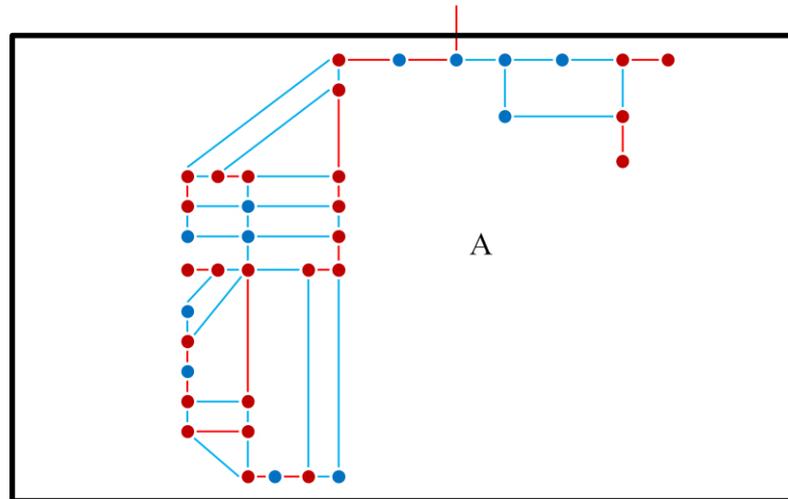
Nas Figuras 34, 35, 36 e 37 são ilustradas as repetições de rotas no percurso planejado nas áreas D, A, B e C respectivamente.

Figura 34 - Área D planejada.



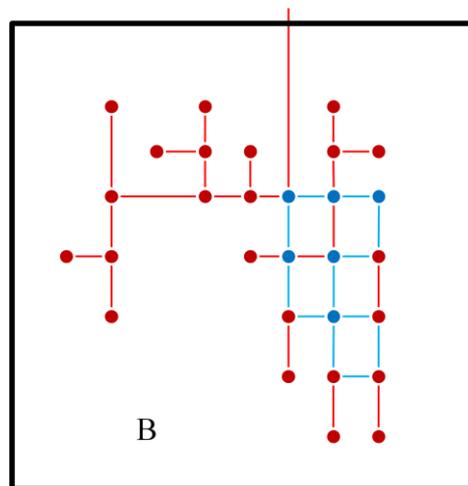
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 - Área A planejada.



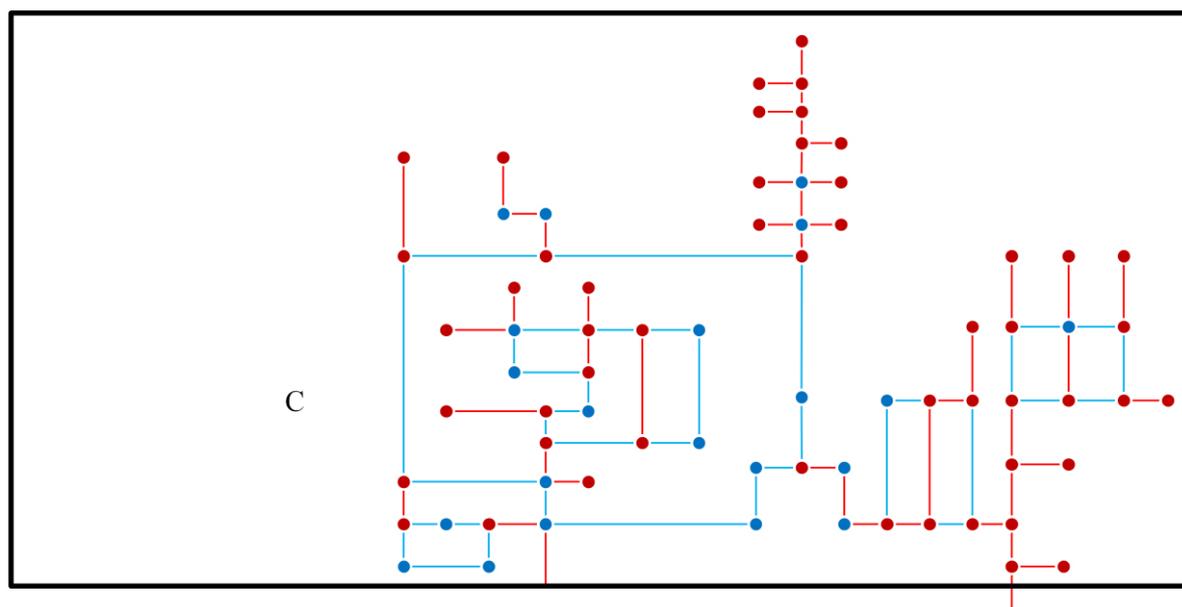
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 - Área B planejada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 - Área C planejada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3 demonstra os dados referentes aos percursos elaborados com o planejamento das rotas baseado no algoritmo do carteiro chinês.

Tabela 3 - Resultados do percurso planejado.

Área	Percurso planejado (km)	Km repetido (km)	km adicional (%)	Nº de repetições
A	8,203	1,400	20,58	18
B	9,935	3,377	51,49	22
C	33,106	11,120	50,58	47
D	9,717	1,577	19,37	19
Total	60,961	17,474	40,18	106

Fonte: Elaborado pelo autor.

O percurso planejado através do algoritmo do carteiro chinês proporcionou uma redução no número de repetições de ruas e conseqüentemente reduziu a quilometragem adicional necessário para fazer o levantamento de dados de todo o distrito. Dessa forma, 106 ruas foram reutilizadas de forma planejada, adicionando 17,474 km a quilometragem total do distrito (43,487 km), valor aproximado de 40,18% de km adicional.

3.4.1 Análise dos resultados

Com base nos dados obtidos, é possível verificar os ganhos e a viabilidade do planejamento de rotas. A Tabela 4 indica a redução no número de repetições do percurso.

Tabela 4 - Redução de repetições.

Área	Nº de repetições (não planejado)	Nº de repetições (planejado)	Total reduzido	Redução de repetições (%)
A	19	18	1	5,26
B	25	22	3	12
C	49	47	2	4,08
D	24	19	5	20,83
Total	117	106	11	9,4

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a aplicação do algoritmo do carteiro chinês, foi possível diminuir onze repetições de ruas para o levantamento de dados de todo o distrito, uma redução de 9,4% em relação as repetições do percurso não planejado.

Na Tabela 5 é indicado a redução da quilometragem total do percurso.

Tabela 5 - Redução na quilometragem total do percurso.

Área	Km adicional (não planejado)	Km adicional (planejado)	Total reduzido	Redução de km (%)
A	8,843	8,203	640 m	7,24
B	10,256	9,935	321 m	3,13
C	33,755	33,106	649 m	1,92
D	10,091	9,717	374 m	3,71
Total	62,945	60,961	1,984 km	3,15

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a diminuição de repetições e o uso de ruas com menor distâncias nas repetições obrigatórias do percurso, foi possível diminuir 1,984 km adicionais do percurso, uma redução de aproximadamente 3,15% em relação ao percurso não planejado.

As áreas B e C, foram as áreas que tiveram a menor influência do algoritmo , pois apesar de serem áreas de grafos conexos, há muitos casos de árvores e arborescências no percurso, o que reduz a eficiência deste tipo de planejamento na redução de repetições, porém ainda foi possível reduzir a quilometragem total do percurso por haver algumas componentes fortemente conexas.

Observando a área D, pode-se verificar que há maior redução no número de repetições em relação às áreas B e C, pois estas possuem maior quantidade de componentes fortemente conexas nos grafos, facilitando a aplicação do algoritmo e por fim diminuindo a quilometragem total do percurso.

Analisando a área A, é possível notar que não houve uma redução significativa quanto ao número de repetições de rotas, porém com a aplicação do algoritmo foi obtido uma redução na quilometragem total do percurso graças ao uso de rotas menores nas repetições necessárias do percurso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho demonstrou como o uso de um planejamento de rotas pode auxiliar o serviço de coleta de dados, abordando a teoria necessária e os principais fatores para a compreensão e aplicação no estudo de caso.

O referencial teórico evidencia ainda outros modelos de resolução para os problemas relacionados a grafos, demonstrando a abrangência deste assunto e os vários objetivos que se podem alcançar.

O planejamento de rotas pode trazer grandes benefícios para as empresas, não apenas nos casos de grafos simétricos, mas também em casos de grafos orientados como no planejamento para rotas logísticas, máquinas de corte ou serviços públicos como coleta seletiva de lixo.

Apesar dos resultados obtidos parecerem pequenos, a aplicação do algoritmo do carteiro chinês no estudo de caso demonstrou vários benefícios que sua utilização proporciona, o que em outra oportunidade pode-se aplicá-lo à uma grande cidade, obtendo melhores resultados.

Os objetivos estabelecidos foram atingidos, pois foi levantado o referencial teórico necessário para compreender o assunto e o mesmo foi utilizado em um estudo de caso, demonstrando sua utilização em um procedimento de levantamento de dados e os resultados obtidos com a redução do número de repetições de percurso e a quilometragem total do mesmo, assim sendo diminuindo o tempo de execução do serviço e aumentando a eficiência da equipe, objetivos que engenheiros de produção buscam atingir nas empresas e indústrias.

Assim, o presente trabalho contribui para o estímulo das empresas prestadoras de serviços de coleta de dados, a executar um planejamento prévio de rotas a serem utilizadas por seus funcionários, aumentando a eficiência de suas equipes, independente do serviço a ser prestado e do tamanho da região a ser atendida.

Trabalhos futuros

Tem-se como sugestão de trabalhos futuros:

- Disponibilizar uma ferramenta que automatize o processo de planejamento de rotas com base nas informações contidas neste trabalho.
- Pesquisar e realizar um estudo de caso com base nos outros algoritmos tratados neste trabalho

REFERÊNCIAS

- . **Dicionário Aurélio**. Disponível em: <<http://www.dicionariodoaurelio.com/>>. Acesso em: 22 out. 2014.
- ALGORITMOS e Teoria dos Grafos: Grafos Eulerianos e Hamiltonianos. Disponível em: <http://www.professeurs.polymtl.ca/michel.gagnon/Disciplinas/Bac/Grafos/EulerHam/euler_ham.html>. Acesso em: 26 jul. 2014.
- ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Análise de Decisões**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2011.
- BARBOSA, Felipe R. S.; SOUSA, Flávio R. J. de; VILELA, Leonardo dos Reis. **Problema da Mochila**. Disponível em: <http://www2.ic.uff.br/~jsilva/artigo_problema_da_mochila.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2014.
- BRETAS et al. **PROBLEMA DA MOCHILA INTEIRA APLICADO EM DECISÕES DE COMPRA DE APARELHOS DE ATIVIDADES DESPORTIVAS: MODELO E APLICAÇÃO**. Disponível em: <http://www.optima2013.cl/articulos/optima2013_submission_6.pdf>. Acesso em: 20 set. 2014.
- CHERRI, A. C. **O Problema de Corte de Estoque com Reaproveitamento das Sobras de Material**. 2006. 119 p. Dissertação (Mestrado) - ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- COUTINHO, Henrique José Souza. **EXTRAÇÃO DE INFORMAÇÃO DE ARQUIVOS VETORIAIS PARA DADOS EM PROBLEMA DE GRAFOS**. 2007. 7 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia de Computação, Universidade do Vale do Itajaí, Curitiba, 2007.
- DANTAS, Bianca. **INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS**. Disponível em: <<http://pt.slideshare.net/biancamcdantas/introduo-teoria-dos-grafos>>. Acesso em: 05 out. 2014.
- DUARTE, Vânia Maria do Nascimento. **Monografias Brasil escola: Pesquisas: Exploratória, Descritiva e Explicativa**. 2013. Disponível em: <<http://monografias.brasilecola.com/regras-abnt/pesquisas-exploratoria-descritiva-explicativa.htm>>. Acesso em: 15 out. 2014.
- FEOFILOFF, Paulo. **Entenda o enigma das pontes de Königsberg que instigou a geometria**: Para resolver o problema, Leonhard Euler criou a Teoria dos Grafos. 2011. Publicada no Globo.com. Disponível em: <<http://redglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html>>. Acesso em: 05 out. 2014.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y.. Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. Disponível em:

<<http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf>>. Acesso em: 16 jul. 2014.

FINCATTI, Camilla. **Problema da Mochila**. Disponível em: <<http://www.e-bee.com.br/site/wp-content/uploads/2010/11/Problema-da-mochila.pdf>>. Acesso em: 05 jul. 2014.

GOLDBARG, Luna; CÉSAR, Marco; L, Henrique Pacca. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. São Paulo: Campus, 2000.

GOMES, M. et al.. **O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS, ALGORITMOS EXATOS E UM AMBIENTE MVI PARA ANÁLISE DE SUAS INSTÂNCIAS: SISTEMA XNÊS**. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/pope/v29n2/v29n2a05>>. Acessado em: 23 out. 2014

HARARY, Frank. **Graph theory**. Canada: Addison-wesley, 1969. 274 p.

LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisão**. 4. ed. Sao Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 240 p.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamasso. **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica**. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rk/v10nspe/a0410spe.pdf>>. Acesso em: 22 out. 2014.

LOPES, Samuel António. **Métodos finitos em matemática**. Disponível em: <<http://arquivoscolar.org/handle/arquivo-e/45>>. Acesso em: 08 jul. 2014.

LUCCHESI, Cláudio Leonardo. Introdução à Teoria de Grafos. 1979. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/12CBM/12_CBM_79_05.pdf> Acesso em 15 jul. 2014.

MARIANI, Antonio C.. **Conceito Básicos da Teoria de Grafos**. Disponível em: <<http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>>. Acesso em: 21 out. 2014.

PETTEAM, Fernanda Bia. **Um Estudo sobre o Problema do Carteiro Chinês**. 2012. Disponível em: <http://vigo.ime.unicamp.br/Projeto/2012-2/ms777/ms777_fernanda.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2014.

RITT, Marcus; Buriol, Luciana S.; Prestes, Edson. **Algoritmos e Complexidade - Notas de Aula**. Disponível em: <<http://arquivoscolar.org/handle/arquivo-e/103>>. Acesso em: 25 set. 2014.

UESC. **INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS**. Disponível em: <http://www.uesc.br/colégiado_matematica/materialdidatico/disserta.pdf>. Acesso em: 05 out. 2014.